O tym, co robię
i dlaczego to jest fajne

Łukasz Kowalik

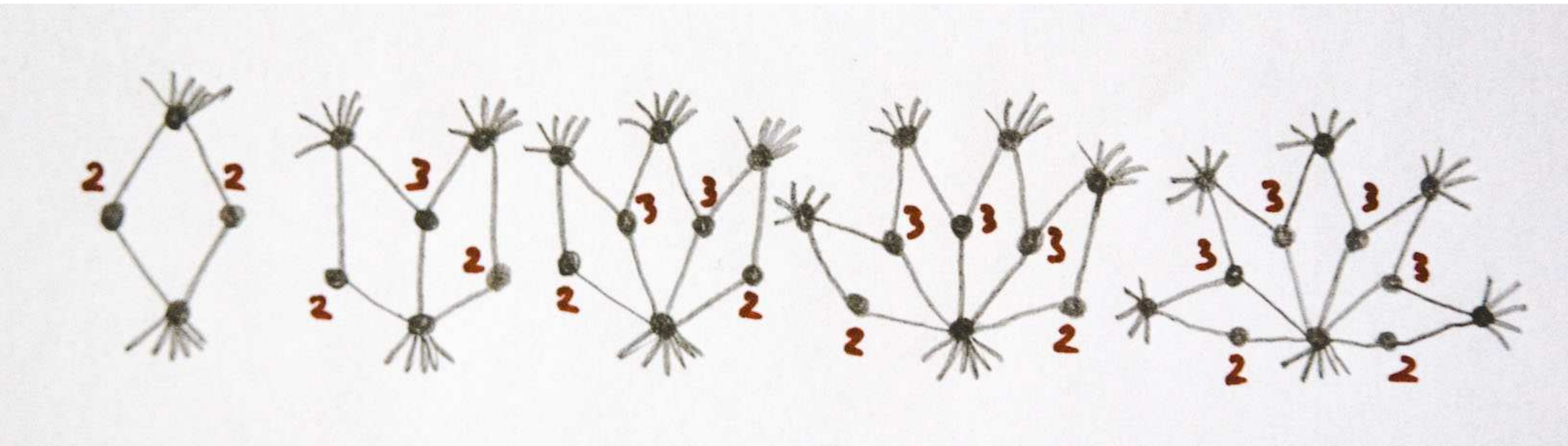
zabawa

Struktura grafów planarnych

Krawędź uv jest **lekka** gdy $\deg(u) + \deg(v) \leq 13$.

Twierdzenie (Borodin) Każdy graf planarny o wierzchołkach stopnia ≥ 3 zawiera lekką krawędź.

Twierdzenie (Cole, K, Škrekovski) Każdy graf planarny o wierzchołkach stopnia ≥ 2 zawiera lekką krawędź lub jeden z poniższych pięciu podgrafów (koronę):



Jak to udowodnić?

- Każdemu wierzchołkowi v dajemy „ładunek” $\deg(v) - 4$.
- Każdej ścianie s o długości $\ell(s)$ dajemy ładunek $\ell(s) - 4$.

Wzór Eulera: Niech n będzie liczbą wierzchołków, m krawędzi a f ścian grafu planarnego spójnego. Wtedy $n - m + f = 2$.

Wniosek: Całkowity ładunek wynosi:

$$\sum_{v \in V} (\deg(v) - 4) + \sum_{s \in F} (\ell(s) - 4) = -4n + 4m - 4f = -8.$$

Pomysł: Pokazać, że przy założeniu że graf nie zawiera lekkiej krawędzi ani korony można tak poprzenosić ładunki, że każda ściana i każdy wierzchołek będą miały nieujemny ładunek — sprzeczność!

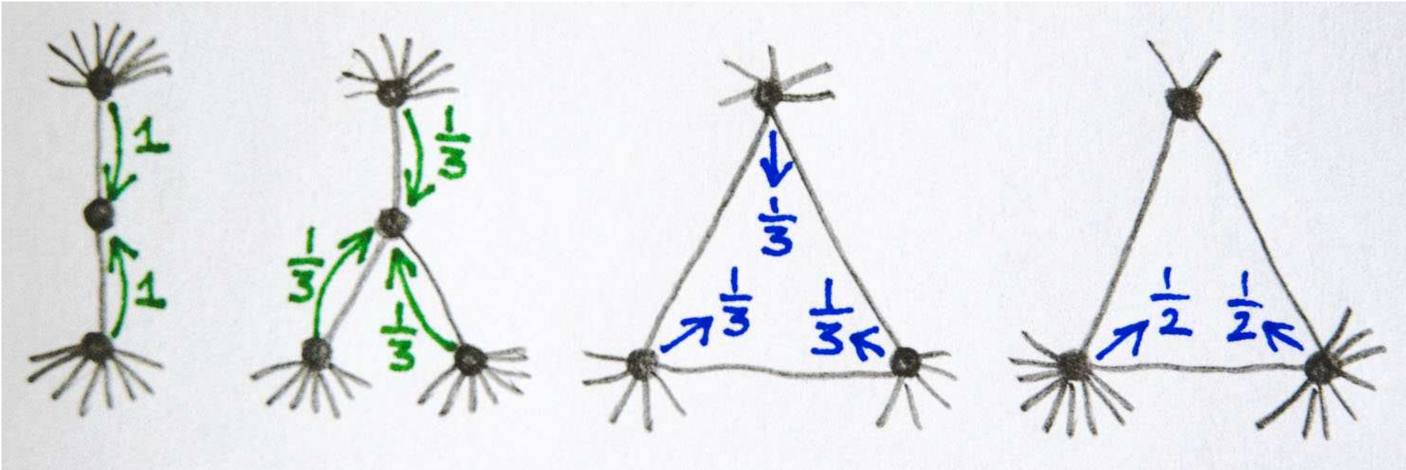
Przenoszenie ładunku

Jakie elementy mają ujemny ładunek?

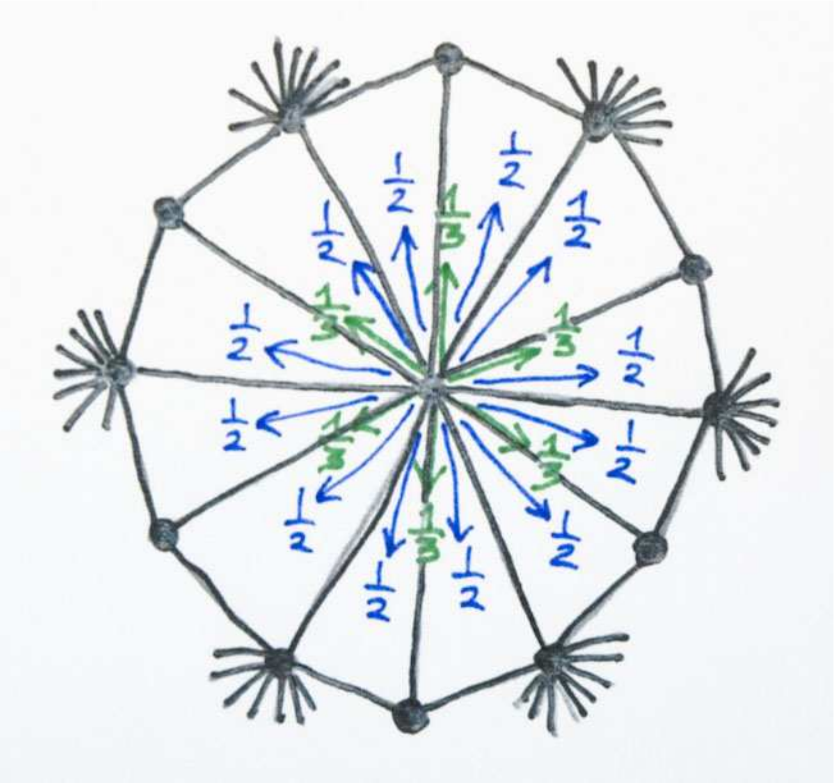
- 2-wierzchołki (wierzchołki stopnia 2),
- 3-wierzchołki,
- ściany trójkątne.

Reguły Przenoszenia ładunku

- 2-wierzchołek dostaje 1 od każdego z sąsiadów.
- 3-wierzchołek dostaje $\frac{1}{3}$ od każdego z sąsiadów.
- ściana trójkątna z wierzchołkami stopni ≥ 6 dostaje od nich po $\frac{1}{3}$.
- ściana trójkątna z wierzchołkiem stopnia ≤ 5 dostaje od pozostałych po $\frac{1}{2}$.

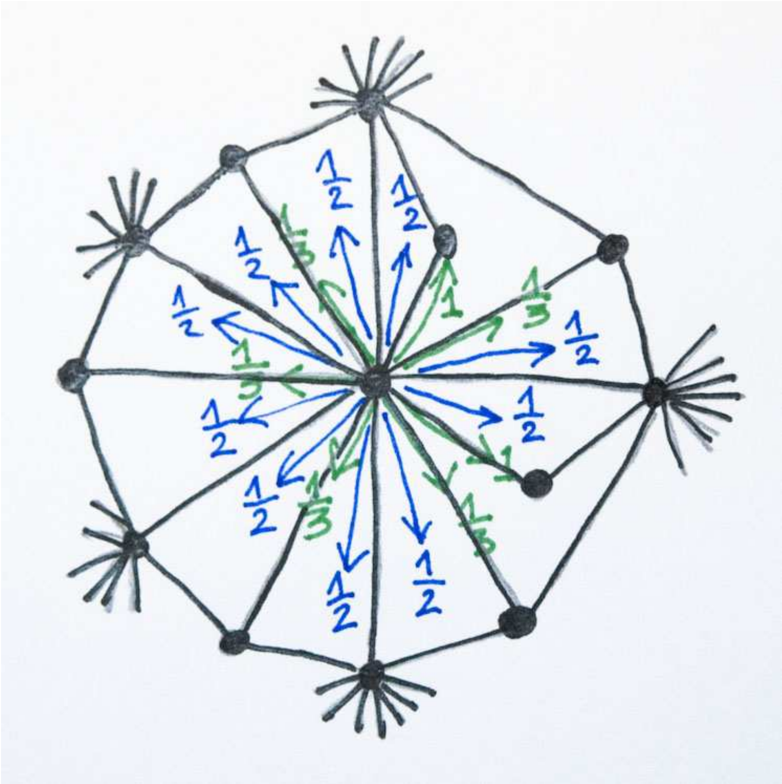


Czy to działa?



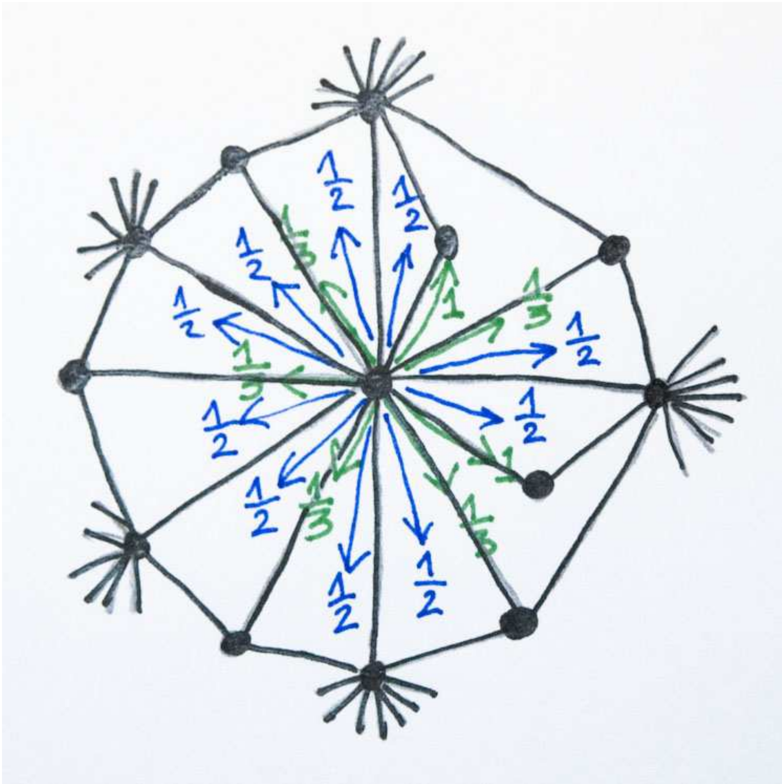
Wierzchołek środkowy ma stopień 12.
Początkowo miał 8 jednostek. Oddaje $6 \cdot \frac{1}{3} + 12 \cdot \frac{1}{2} = 8$.
Zostaje mu nieujemny ładunek (0), hura!

A tutaj?



Wierzchołek środkowy ma stopień 12.
Miał 8 jednostek. Oddaje $2 \cdot 1 + 5 \cdot \frac{1}{3} + 10 \cdot \frac{1}{2} = 8\frac{2}{3}$.
Zostaje mu ładunek $-\frac{2}{3}$.

A tutaj?



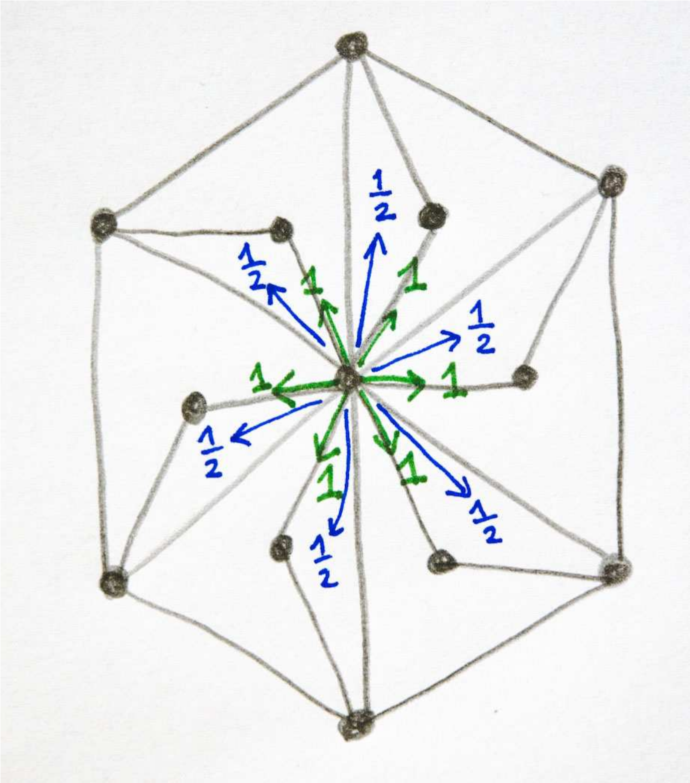
Wierzchołek środkowy ma stopień 12.

Miał 8 jednostek. Oddaje $2 \cdot 1 + 5 \cdot \frac{1}{3} + 10 \cdot \frac{1}{2} = 8\frac{2}{3}$.

Zostaje mu ładunek $-\frac{2}{3}$.

Aha, nie ma kłopotu, tu jest korona!

A tutaj?

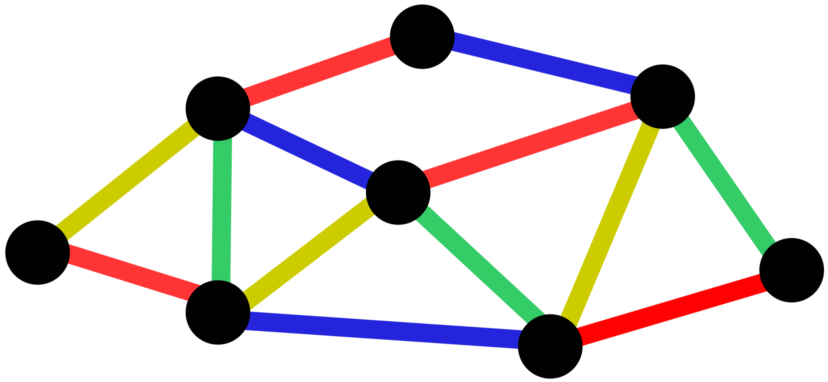


Wierzchołek środkowy ma stopień 12.
Początkowo miał 8 jednostek. Oddaje $6 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot 1 = 9$.
Zostaje mu ładunek -1, uuups!

ciekawość

Kolorowanie krawędziowe

Przypisać kolory krawędziom tak, aby krawędzie o wspólnym końcu miały różne kolory.



Co wiadomo? ($\Delta = \max_v \deg(v)$)

- Potrzeba Δ kolorów (trywialne)
- Wystarczy $\Delta + 1$ kolorów (Vizing)
- Decydowanie "$\Delta/(\Delta + 1)$" jest NP-zupełne nawet dla $\Delta = 3$. Czyli (pewnie) nie można znajdować optymalnego kolorowania efektywnie.

Ale jak dużo można zrobić?

Czy (dla $\Delta = 3$) można znajdować optymalne kolorowanie szybciej niż brutalnym algorytmem $O(2^{\#\mathrm{krawedzi}})$?

3-kolorowanie krawędziowe: wyniki

Niech G będzie grafem wejściowym, o n wierzchołkach i $m \leq \frac{3}{2}n$ krawędziach.

- Algorytm brutalny. Czas: $O(2^m) = O(2^{3/2n}) = O(2.83^n)$.
- Podejście: pokoloruj wierzchołki odpowiadającego grafu liniowego $L(G)$.
  Czas: $O(1.3289^{|V(L(G))|}) = O(1.3289^m) = O(1.532^n)$.
  Beigel & Eppstein [2005]
- (dla $\geq$ 4 kolorów jest to najlepszy znany wynik.)
- Algorytm $O(1.415^n) = O(2^{n/2})$. Beigel & Eppstein [2005]
- Algorytm $O(1.344^n) = O(2^{0.427n})$. K. [2007]

współpraca

Problem komiwojażera

Dane: Odległości między n miastami. Asymetryczne i spełniające nierówność trójkąta.

Problem: Znaleźć trasę komiwojażera (cykl Hamiltona) o **największej** długości.

- Problem jest NP-zupełny,
- Poprzednio znany był algorytm $\frac{10}{13}$-aproksymacyjny [Kaplan i inni 2005] ($\frac{10}{13} \approx 0.769$),
- Nowy algorytm: $\frac{35}{44}$-aproksymacyjny [K. i Mucha 2007] ($\frac{35}{44} \approx 0.795$),

Współpraca z Marcinem Muchą

- $\frac{10}{13} \approx 0.769$, Kaplan i inni, 2005.

Współpraca z Marcinem Muchą

- $\frac{10}{13} \approx 0.769$, Kaplan i inni, 2005.
- „coś tu da się zrobić !!!”, Mucha, sierpień 2006

Współpraca z Marcinem Muchą

- $\frac{10}{13} \approx 0.769$, Kaplan i inni, 2005.
- „coś tu da się zrobić !!!”, Mucha, sierpień 2006
- $\frac{7}{9} \approx 0.777$, K. i Mucha, sierpień 2006.

Współpraca z Marcinem Muchą

- $\frac{10}{13} \approx 0.769$, Kaplan i inni, 2005.
- „coś tu da się zrobić !!!”, Mucha, sierpień 2006
- $\frac{7}{9} \approx 0.777$, K. i Mucha, sierpień 2006.
- $\frac{11}{14} \approx 0.785$, K., sierpień 2006.

Współpraca z Marcinem Muchą

- $\frac{10}{13} \approx 0.769$, Kaplan i inni, 2005.
- „coś tu da się zrobić !!!”, Mucha, sierpień 2006
- $\frac{7}{9} \approx 0.777$, K. i Mucha, sierpień 2006.
- $\frac{11}{14} \approx 0.785$, K., sierpień 2006.
- $\frac{15}{19} \approx 0.789$, Mucha, wrzesień 2006.

Współpraca z Marcinem Muchą

- $\frac{10}{13} \approx 0.769$, Kaplan i inni, 2005.
- „coś tu da się zrobić !!!”, Mucha, sierpień 2006
- $\frac{7}{9} \approx 0.777$, K. i Mucha, sierpień 2006.
- $\frac{11}{14} \approx 0.785$, K., sierpień 2006.
- $\frac{15}{19} \approx 0.789$, Mucha, wrzesień 2006.
- $\frac{35}{44} \approx 0.795$, K. i Mucha, luty 2007.

Współpraca z Marcinem Muchą

- $\frac{10}{13} \approx 0.769$, Kaplan i inni, 2005.
- „coś tu da się zrobić !!!”, Mucha, sierpień 2006
- $\frac{7}{9} \approx 0.777$, K. i Mucha, sierpień 2006.
- $\frac{11}{14} \approx 0.785$, K., sierpień 2006.
- $\frac{15}{19} \approx 0.789$, Mucha, wrzesień 2006.
- $\frac{35}{44} \approx 0.795$, K. i Mucha, luty 2007.
- $(\approx (\frac{35}{44} + \frac{1}{1000}) \approx 0.795$, K. i Mucha, czerwiec 2007.

Współpraca z Marcinem Muchą

- $\frac{10}{13} \approx 0.769$, Kaplan i inni, 2005.
- „coś tu da się zrobić !!!”, Mucha, sierpień 2006
- $\frac{7}{9} \approx 0.777$, K. i Mucha, sierpień 2006.
- $\frac{11}{14} \approx 0.785$, K., sierpień 2006.
- $\frac{15}{19} \approx 0.789$, Mucha, wrzesień 2006.
- $\frac{35}{44} \approx 0.795$, K. i Mucha, luty 2007.
- $(\approx (\frac{35}{44} + \frac{1}{1000}) \approx 0.795$, K. i Mucha, czerwiec 2007.
- to nie jest nasze ostatnie słowo!

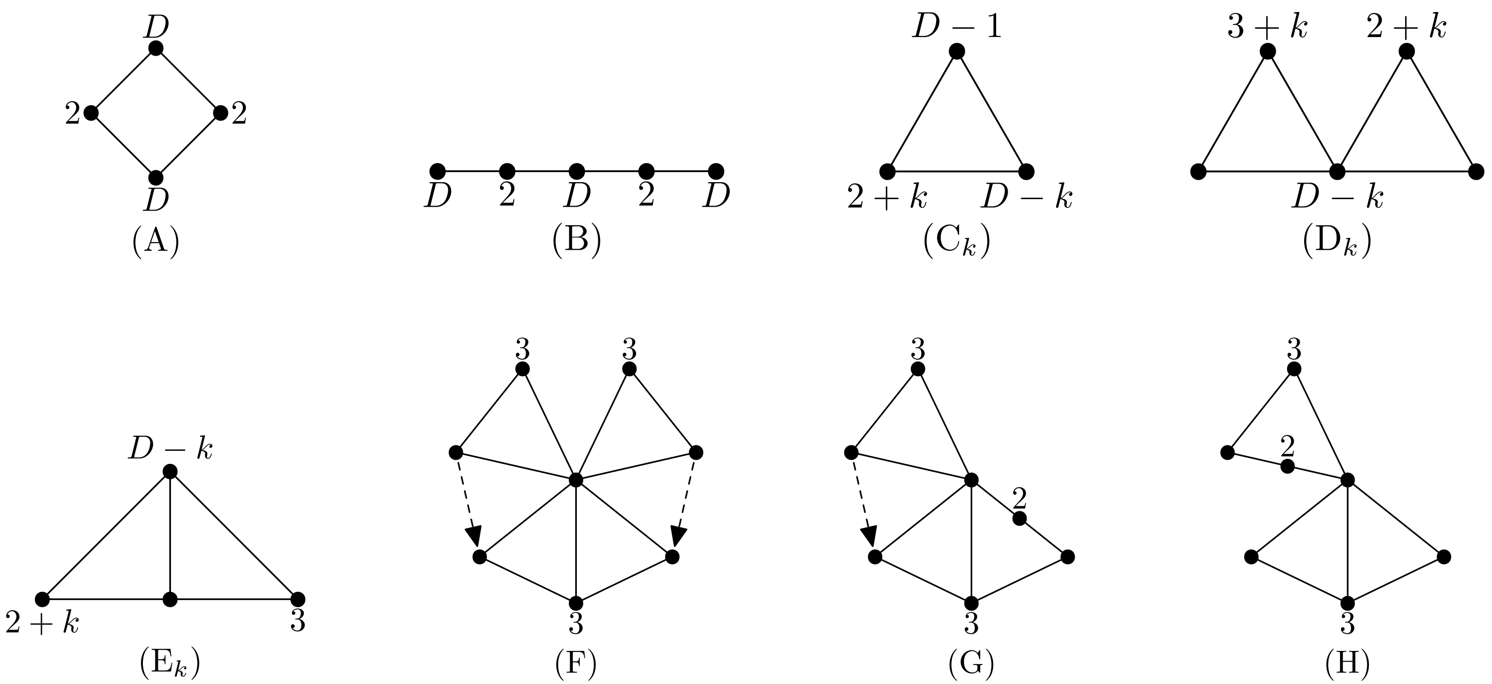
Moi współpracownicy

- Marek Chrobak,
- Richard Cole,
- Krzysztof Diks,
- Maciej Kurowski,
- Marcin Mucha,
- Jean-Sebastien Sereni,
- Riste Škrekovski.

estetyka

Rysunek z pracy

Oto rysunek z pracy
Cole, K., New Linear-Time Algorithms for Edge-Coloring Planar Graphs (2007):




swoboda