Losowy wycinek mojej pracy

Marcin Pilipczuk

Instytut Informatyki, Uniwersytet Warszawski

18. października 2012

Ciekawy wycinek:
złożoność parametryzowana problemów rozcinania grafu

Ciekawy wycinek:
złożoność parametryzowana problemów rozcinania grafu

próbujemy nieznacznie zmodyfikować graf,
by osiągnąć pewną własność separacyjną

Multiway Cut

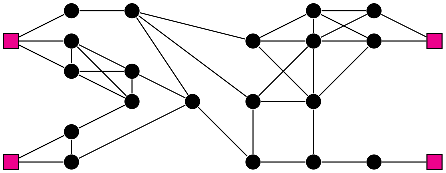
Multiway Cut (MWC)

Wejście: Graf $G = (V, E)$, zbiór terminali $T \subseteq V$ oraz liczba k.
Pytanie: Czy istnieje zbiór $X \subseteq V \setminus T$, $|X| \leqslant k$ taki, że każdy terminal jest w innej spójnej składowej $G \setminus X$?

Multiway Cut

Multiway Cut (MWC)

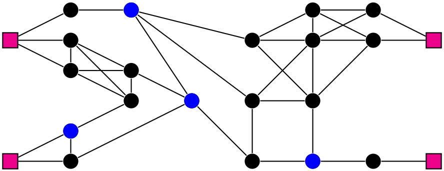
Wejście: Graf $G = (V, E)$, zbiór terminali $T \subseteq V$ oraz liczba k.
Pytanie: Czy istnieje zbiór $X \subseteq V \setminus T$, $|X| \leqslant k$ taki, że każdy terminal jest w innej spójnej składowej $G \setminus X$?



Multiway Cut

Multiway Cut (MWC)

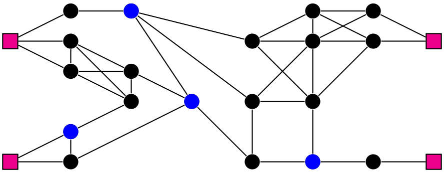
Wejście: Graf $G = (V, E)$, zbiór terminali $T \subseteq V$ oraz liczba k.
Pytanie: Czy istnieje zbiór $X \subseteq V \setminus T$, $|X| \leqslant k$ taki, że każdy terminal jest w innej spójnej składowej $G \setminus X$?



Multiway Cut

Multiway Cut (MWC)

Wejście: Graf $G = (V, E)$, zbiór terminali $T \subseteq V$ oraz liczba k.
Pytanie: Czy istnieje zbiór $X \subseteq V \setminus T$, $|X| \leqslant k$ taki, że każdy terminal jest w innej spójnej składowej $G \setminus X$?



Twierdzenie (CPPW'11)

Problem Multiway Cut *można rozwiązać w czasie* $2^k n^{\mathcal{O}(1)}$.

Feedback Vertex Set

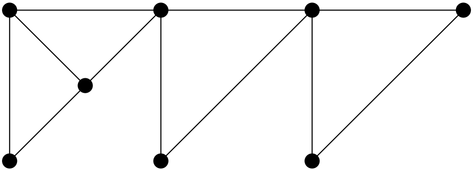
Feedback Vertex Set (FVS)

Wejście: Graf $G = (V, E)$ i liczba k.
Pytanie: Czy istnieje zbiór $X \subseteq V$, $|X| \leqslant k$ taki, że $G \setminus X$ jest lasem?
Innymi słowy, X przecina wszystkie cykle G.

Feedback Vertex Set

Feedback Vertex Set (FVS)

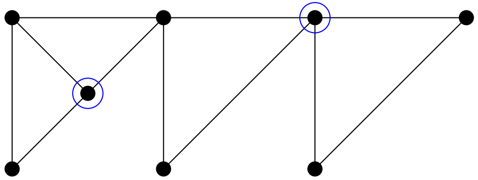
Wejście: Graf $G = (V, E)$ i liczba k.
Pytanie: Czy istnieje zbiór $X \subseteq V$, $|X| \leqslant k$ taki, że $G \setminus X$ jest lasem?
Innymi słowy, X przecina wszystkie cykle G.



Feedback Vertex Set

Feedback Vertex Set (FVS)

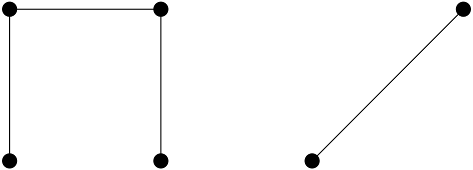
Wejście: Graf $G = (V, E)$ i liczba k.
Pytanie: Czy istnieje zbiór $X \subseteq V$, $|X| \leqslant k$ taki, że $G \setminus X$ jest lasem?
Innymi słowy, X przecina wszystkie cykle G.



Feedback Vertex Set

FEEDBACK VERTEX SET (FVS)

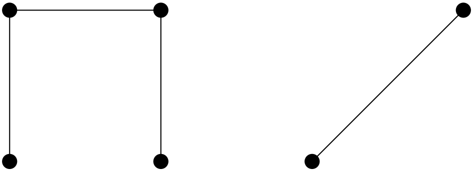
Wejście: Graf $G = (V, E)$ i liczba k.
Pytanie: Czy istnieje zbiór $X \subseteq V$, $|X| \leqslant k$ taki, że $G \setminus X$ jest lasem?
Innymi słowy, X przecina wszystkie cykle G.



Feedback Vertex Set

Feedback Vertex Set (FVS)

Wejście: Graf $G = (V, E)$ i liczba k.
Pytanie: Czy istnieje zbiór $X \subseteq V$, $|X| \leqslant k$ taki, że $G \setminus X$ jest lasem?
Innymi słowy, X przecina wszystkie cykle G.



Twierdzenie (CNPPRW'11)

Problem Feedback Vertex Set *można rozwiązać w czasie* $3^k n^{\mathcal{O}(1)}$.

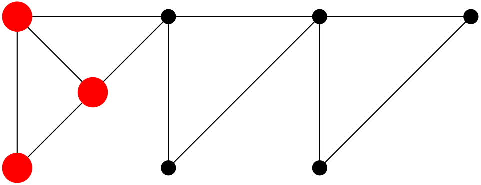
Subset Feedback Vertex Set

SUBSET FVS (SFVS)

Wejście: Graf $G = (V, E)$, zbiór czerwonych wierzchołków $S \subseteq V$ oraz liczba k.
Pytanie: Czy istnieje zbiór $X \subseteq V$, $|X| \leqslant k$ który przecina wszystkie cykle przechodzące przez co najmniej jeden czerwony wierczhołek?

SUBSET FVS (SFVS)

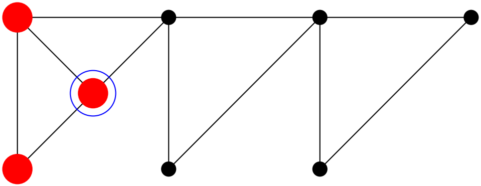
Wejście: Graf $G = (V, E)$, zbiór czerwonych wierzchołków $S \subseteq V$ oraz liczba k.
Pytanie: Czy istnieje zbiór $X \subseteq V$, $|X| \leqslant k$ który przecina wszystkie cykle przechodzące przez co najmniej jeden czerwony wierczhołek?



Subset Feedback Vertex Set

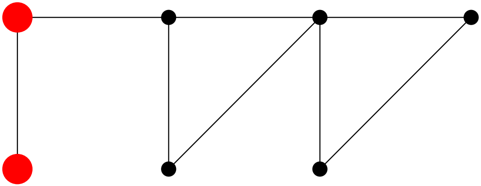
Subset FVS (SFVS)

Wejście: Graf $G = (V, E)$, zbiór czerwonych wierzchołków $S \subseteq V$ oraz liczba k.
Pytanie: Czy istnieje zbiór $X \subseteq V$, $|X| \leqslant k$ który przecina wszystkie cykle przechodzące przez co najmniej jeden czerwony wierczhołek?



Subset FVS (SFVS)

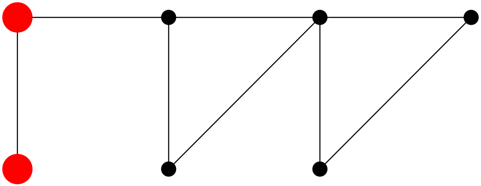
Wejście: Graf $G = (V, E)$, zbiór czerwonych wierzchołków $S \subseteq V$ oraz liczba k.
Pytanie: Czy istnieje zbiór $X \subseteq V$, $|X| \leqslant k$ który przecina wszystkie cykle przechodzące przez co najmniej jeden czerwony wierczhołek?



Subset Feedback Vertex Set

Subset FVS (SFVS)

Wejście: Graf $G = (V, E)$, zbiór czerwonych wierzchołków $S \subseteq V$ oraz liczba k.
Pytanie: Czy istnieje zbiór $X \subseteq V$, $|X| \leqslant k$ który przecina wszystkie cykle przechodzące przez co najmniej jeden czerwony wierczhołek?



Twierdzenie (CPPW'11)

Problem Subset Feedback Vertex Set *można rozwiązać w czasie* $2^{\mathcal{O}(k \log k)} n^{\mathcal{O}(1)}$.

Unique Label Cover

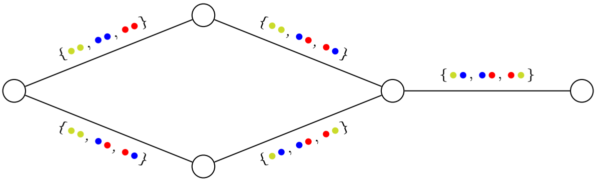
Unique Label Cover (ULC)

Wejście: Graf $G = (V, E)$, alfabet Σ, liczba k oraz dla każdej krawędzi $e \in E$ więzy ψ_e będąca bijekcją $\Sigma \to \Sigma$.
Pytanie: Czy wierzchołki grafu można poetykietować elementami Σ tak, by co najwyżej k więzów było niespełnionych?

Unique Label Cover (ULC)

Wejście: Graf $G = (V, E)$, alfabet Σ, liczba k oraz dla każdej krawędzi $e \in E$ więzy ψ_e będąca bijekcją $\Sigma \to \Sigma$.
Pytanie: Czy wierzchołki grafu można poetykietować elementami Σ tak, by co najwyżej k więzów było niespełnionych?

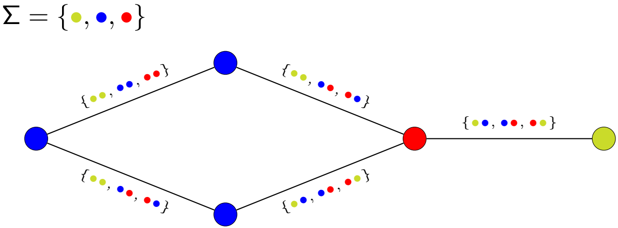
$\Sigma = \{\bullet, \bullet, \bullet\}$



Unique Label Cover

Unique Label Cover (ULC)

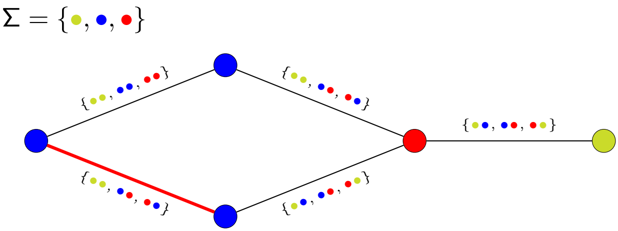
Wejście: Graf $G = (V, E)$, alfabet Σ, liczba k oraz dla każdej krawędzi $e \in E$ więzy ψ_e będąca bijekcją $\Sigma \to \Sigma$.
Pytanie: Czy wierzchołki grafu można poetykietować elementami Σ tak, by co najwyżej k więzów było niespełnionych?



Unique Label Cover

Unique Label Cover (ULC)

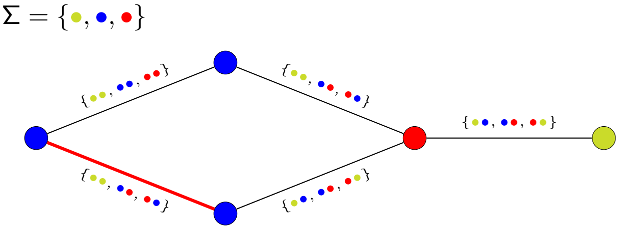
Wejście: Graf $G = (V, E)$, alfabet Σ, liczba k oraz dla każdej krawędzi $e \in E$ więzy ψ_e będąca bijekcją $\Sigma \to \Sigma$.
Pytanie: Czy wierzchołki grafu można poetykietować elementami Σ tak, by co najwyżej k więzów było niespełnionych?



Unique Label Cover

Unique Label Cover (ULC)

Wejście: Graf $G = (V, E)$, alfabet Σ, liczba k oraz dla każdej krawędzi $e \in E$ więzy ψ_e będąca bijekcją $\Sigma \to \Sigma$.
Pytanie: Czy wierzchołki grafu można poetykietować elementami Σ tak, by co najwyżej k więzów było niespełnionych?



Twierdzenie (CCHPP'12)

Problem Unique Label Cover *można rozwiązać w czasie* $|\Sigma|^{\mathcal{O}(k^2)} n^{\mathcal{O}(1)}$.

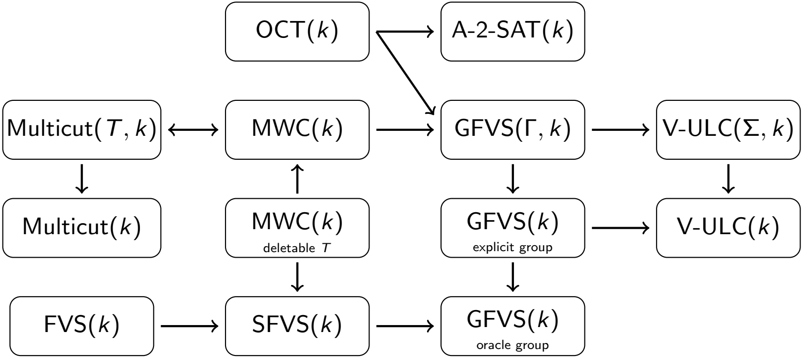
Inne problemy rozciania grafu

- Feedback Vertex Set (FVS)
- Subset Feedback Vertex Set (SFVS)
- Multiway Cut
- [Vertex-deletion] Unique Label Cover ([V-]ULC)

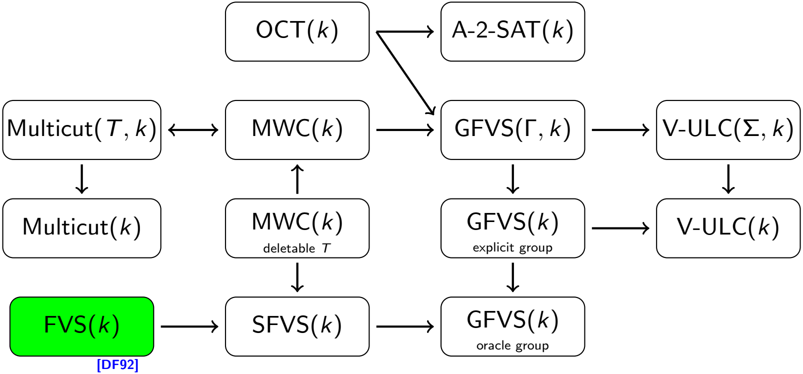
Inne problemy rozciania grafu

- Feedback Vertex Set (FVS)
- Subset Feedback Vertex Set (SFVS)
- Multiway Cut
- [Vertex-deletion] Unique Label Cover ([V-]ULC)
- Multicut
- Group Feedback Vertex Set (GFVS)
- Odd Cycle Transversal (OCT)
- Almost 2-SAT
- Multiwaycut-Uncut
- Multicut-Uncut
- k-way Cut
- Steiner Cut

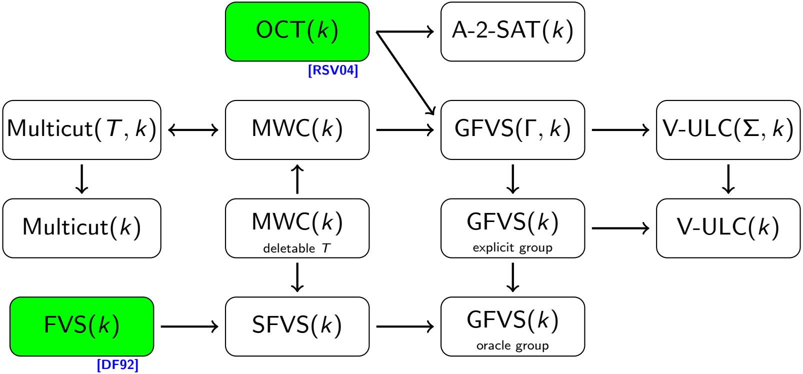
Wybrane problemy z zależnościami



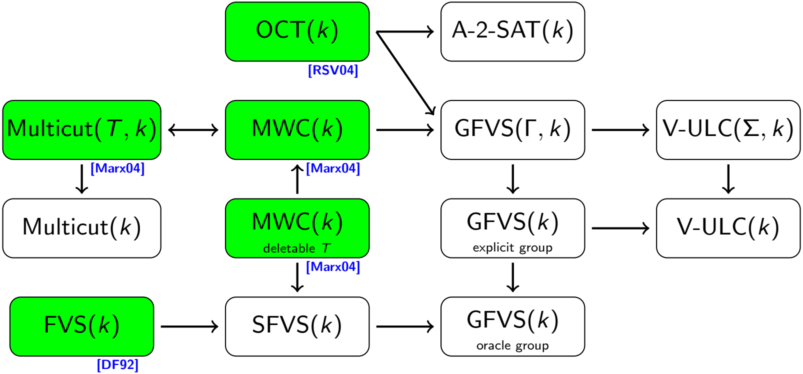
Wybrane problemy z zależnościami



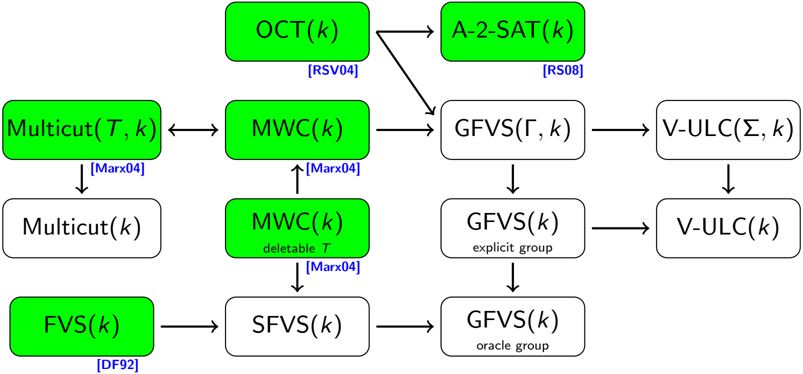
Wybrane problemy z zależnościami



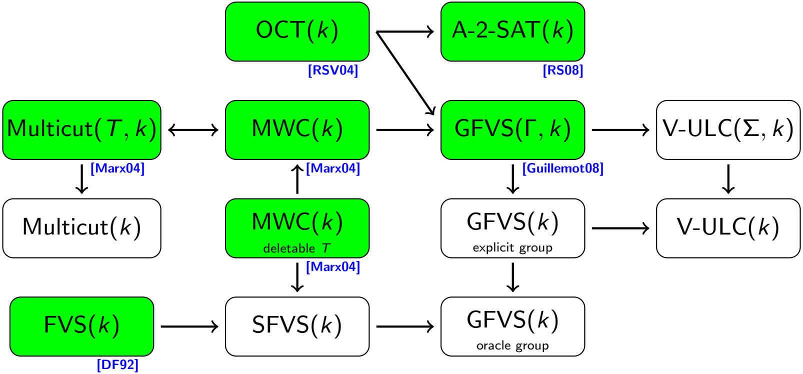
Wybrane problemy z zależnościami



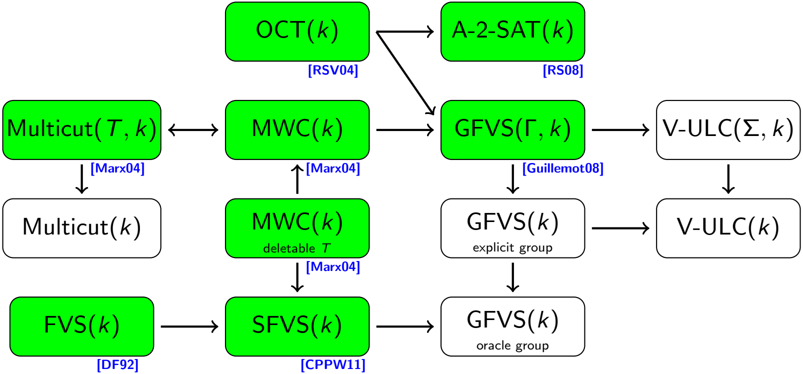
Wybrane problemy z zależnościami



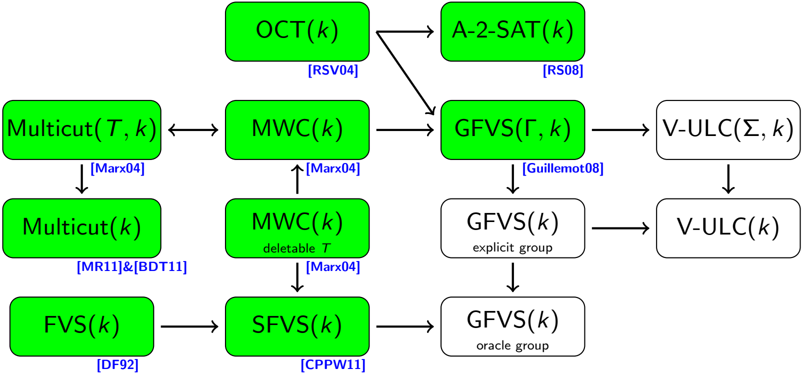
Wybrane problemy z zależnościami



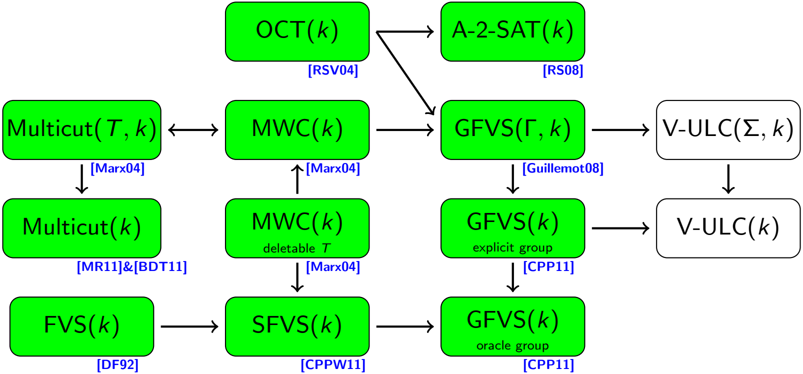
Wybrane problemy z zależnościami



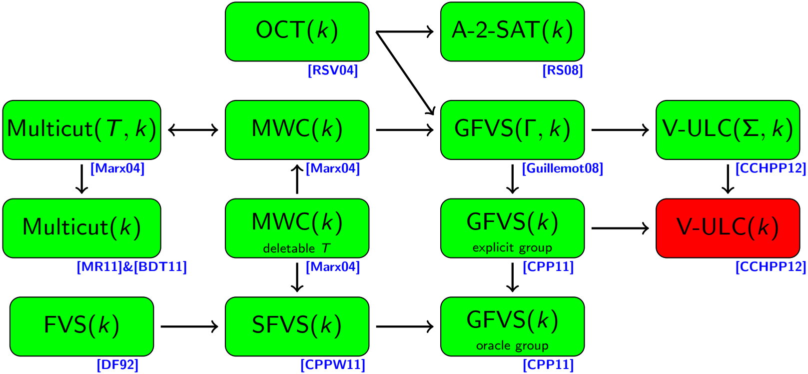
Wybrane problemy z zależnościami



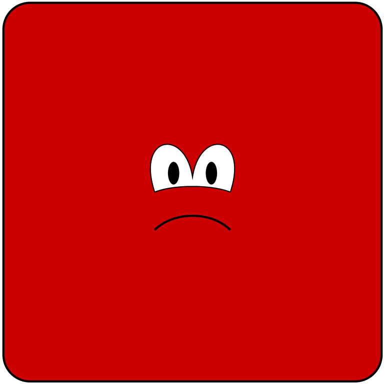
Wybrane problemy z zależnościami



Wybrane problemy z zależnościami

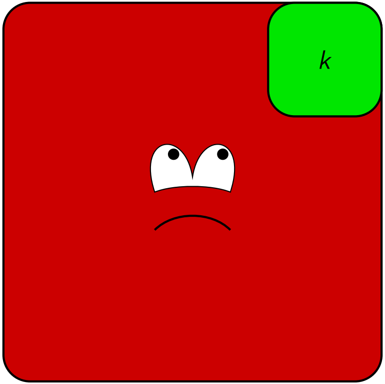


Kernelizacja



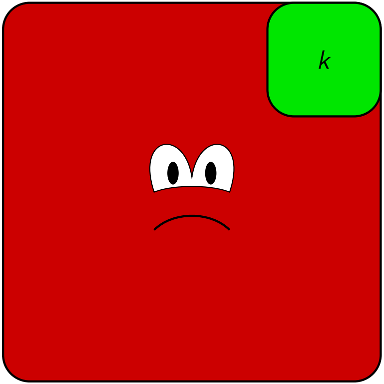
instancja NP-trudnego problemu

Kernelizacja



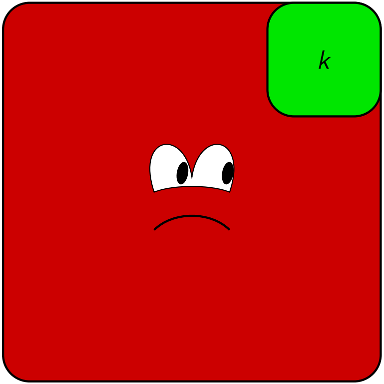
instancja NP-trudnego problemu

Kernelizacja



instancja NP-trudnego problemu

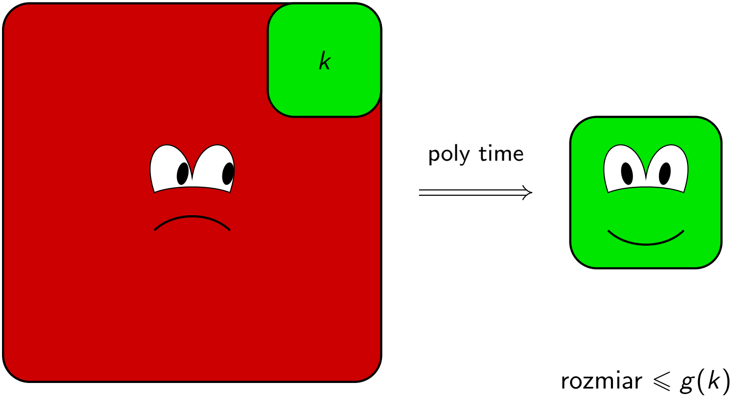
Kernelizacja



instancja NP-trudnego problemu

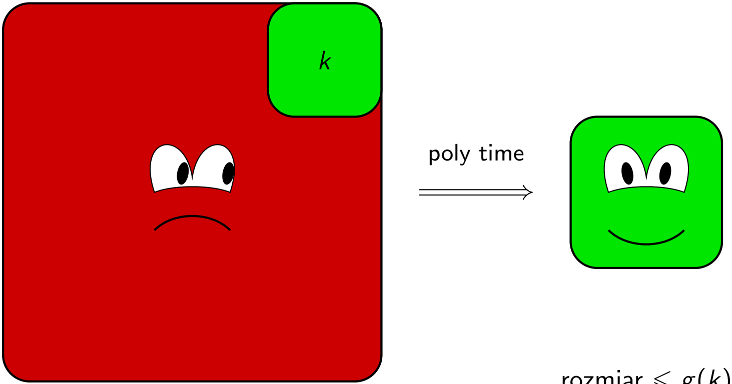
poly time

$\Longrightarrow$



instancja NP-trudnego problemu

Kernelizacja

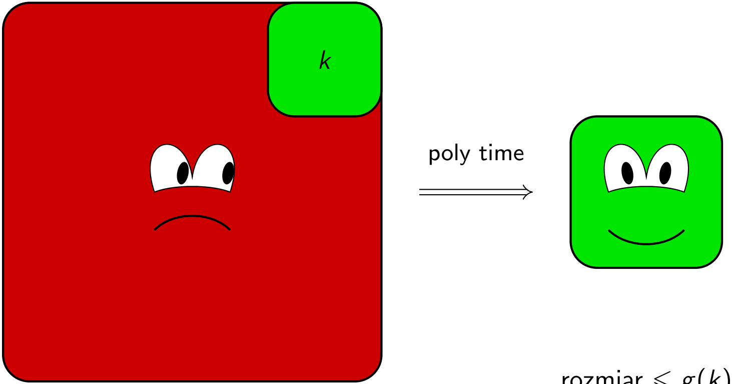


instancja NP-trudnego problemu

rozmiar $\leqslant g(k)$

małe: $g(k)$ wielomianowe

Kernelizacja



instancja NP-trudnego problemu

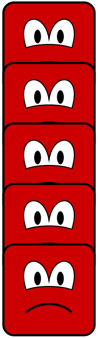
rozmiar $\leqslant g(k)$

małe: $g(k)$ wielomianowe

czasem niemożliwe

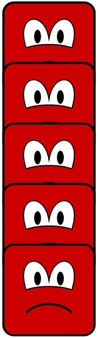
Dolne ograniczenia w kernelizacji
[Bodlaender, Downey, Fellows, Hermelin, ICALP'08]

Dolne ograniczenia w kernelizacji
[Bodlaender, Downey, Fellows, Hermelin, ICALP'08]



t instancji
trudnego języka L

Dolne ograniczenia w kernelizacji
[Bodlaender, Downey, Fellows, Hermelin, ICALP'08]

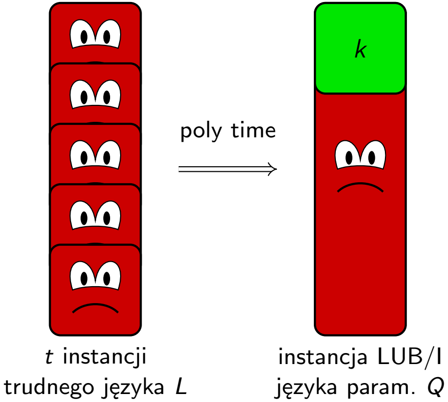


poly time

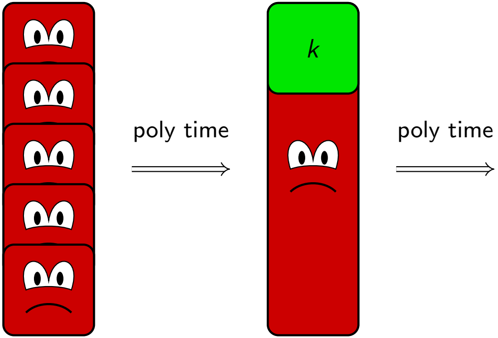
$\Longrightarrow$

t instancji
trudnego języka L

Dolne ograniczenia w kernelizacji
[Bodlaender, Downey, Fellows, Hermelin, ICALP'08]



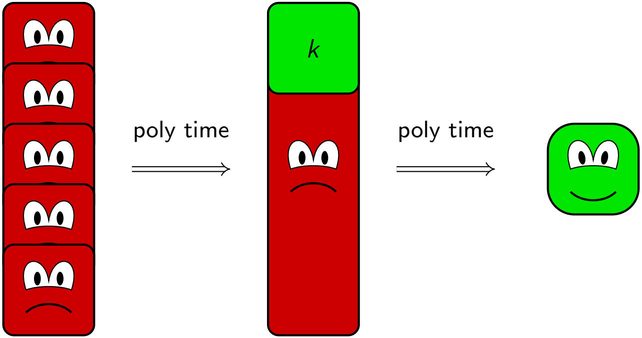
Dolne ograniczenia w kernelizacji
[Bodlaender, Downey, Fellows, Hermelin, ICALP'08]



t instancji trudnego języka L

instancja LUB/I języka param. Q

Dolne ograniczenia w kernelizacji
[Bodlaender, Downey, Fellows, Hermelin, ICALP'08]



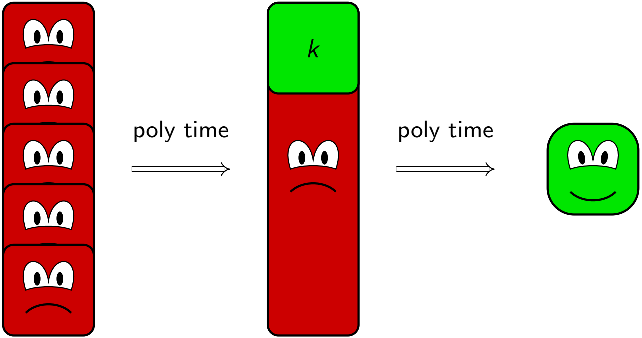
t instancji trudnego języka L

instancja LUB/I języka param. Q

rozmiar $\leqslant \mathrm{poly}(k)$

Dolne ograniczenia w kernelizacji

[Bodlaender, Downey, Fellows, Hermelin, ICALP'08]

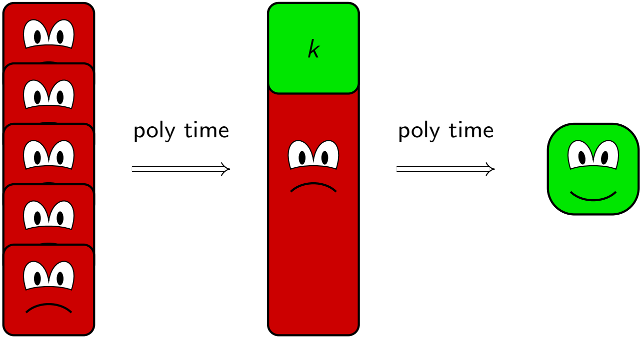


t instancji trudnego języka L

instancja LUB/I języka param. Q

rozmiar $\leqslant \mathrm{poly}(k)$

[Fortnow, Santhanam, STOC'08]$\wedge$[Drucker, FOCS'12] $\Rightarrow L \in \mathrm{coNP/poly}$



t instancji trudnego języka L

instancja LUB/I języka param. Q

rozmiar $\leqslant \mathrm{poly}(k)$

[Fortnow, Santhanam, STOC'08]$\wedge$[Drucker, FOCS'12] $\Rightarrow L \in \mathrm{coNP/poly}$

L jest NP-trudny $\Rightarrow \mathrm{NP} \subseteq \mathrm{coNP/poly} \Rightarrow PH = \Sigma_3^P$

Edge Multicut

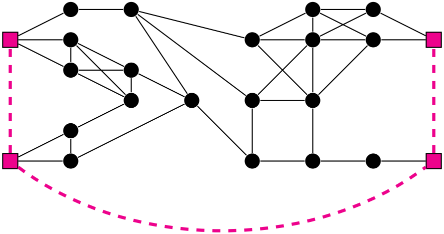
Edge Multicut

Wejście: Graf $G = (V, E)$, zbiór par terminali $T \subseteq V \times V$ oraz liczba k.
Pytanie: Czy istnieje zbiór $X \subseteq E$, $|X| \leqslant k$ taki, że dla każdej pary terminali $(s, t) \in T$, s i t są w różnych spójnych składowych $G \setminus X$?

Edge Multicut

Edge Multicut

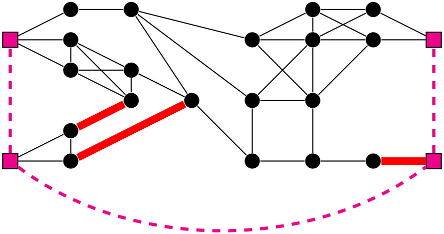
Wejście: Graf $G = (V, E)$, zbiór par terminali $T \subseteq V \times V$ oraz liczba k.
Pytanie: Czy istnieje zbiór $X \subseteq E$, $|X| \leqslant k$ taki, że dla każdej pary terminali $(s, t) \in T$, s i t są w różnych spójnych składowych $G \setminus X$?



Edge Multicut

Edge Multicut

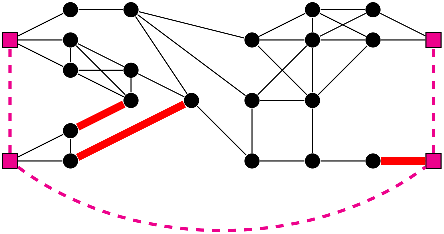
Wejście: Graf $G = (V, E)$, zbiór par terminali $T \subseteq V \times V$ oraz liczba k.
Pytanie: Czy istnieje zbiór $X \subseteq E$, $|X| \leqslant k$ taki, że dla każdej pary terminali $(s, t) \in T$, s i t są w różnych spójnych składowych $G \setminus X$?



Edge Multicut

Edge Multicut

Wejście: Graf $G = (V, E)$, zbiór par terminali $T \subseteq V \times V$ oraz liczba k.
Pytanie: Czy istnieje zbiór $X \subseteq E$, $|X| \leqslant k$ taki, że dla każdej pary terminali $(s, t) \in T$, s i t są w różnych spójnych składowych $G \setminus X$?



Pokażemy brak wielomianowego jądra przy parametryzacji przez k.

Edge Multiway Cut

Jako język startowy, L, wybierzemy:

Edge Multiway Cut

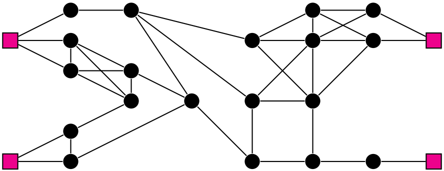
Wejście: Graf $G = (V, E)$, zbiór terminali $T \subseteq V$ oraz liczba k.
Pytanie: Czy istnieje zbiór $X \subseteq E$, $|X| \leqslant k$ taki, że każdy terminal jest w innej spójnej składowej $G \setminus X$?

Edge Multiway Cut

Jako język startowy, L, wybierzemy:

Edge Multiway Cut

Wejście: Graf $G = (V, E)$, zbiór terminali $T \subseteq V$ oraz liczba k.
Pytanie: Czy istnieje zbiór $X \subseteq E$, $|X| \leqslant k$ taki, że każdy terminal jest w innej spójnej składowej $G \setminus X$?

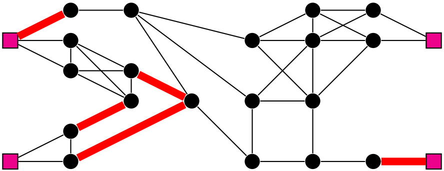


Edge Multiway Cut

Jako język startowy, L, wybierzemy:

Edge Multiway Cut

Wejście: Graf $G = (V, E)$, zbiór terminali $T \subseteq V$ oraz liczba k.
Pytanie: Czy istnieje zbiór $X \subseteq E$, $|X| \leqslant k$ taki, że każdy terminal jest w innej spójnej składowej $G \setminus X$?

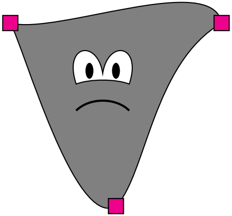


Szykowanie instancji

Wejściowy język L**:** 3-terminalowy EDGE MULTIWAY CUT.

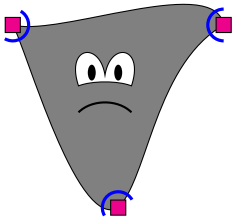
Szykowanie instancji

Wejściowy język L: 3-terminalowy Edge Multiway Cut.



Szykowanie instancji

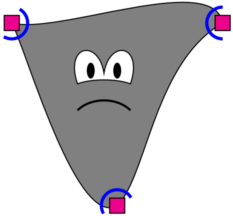
Wejściowy język L**:** 3-terminalowy EDGE MULTIWAY CUT.



- $\forall_{t \in T} \delta(t)$ to jedyny najmniejszy t-$T \setminus \{t\}$ separator;

Szykowanie instancji

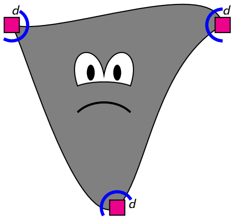
Wejściowy język L: 3-terminalowy EDGE MULTIWAY CUT.



- $\forall_{t\in T}\delta(t)$ to jedyny najmniejszy t-$T \setminus \{t\}$ separator;
- $\forall_{t\in T}\mathrm{deg}(t) = d$;

Szykowanie instancji

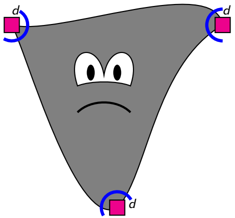
Wejściowy język L: 3-terminalowy Edge Multiway Cut.



- $\forall_{t \in T} \delta(t)$ to jedyny najmniejszy t-$T \setminus \{t\}$ separator;
- $\forall_{t \in T} \deg(t) = d$;
- $d < p < 2d$ (w przeciwnym wypadku trywialna instancja);

Szykowanie instancji

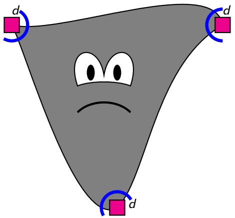
Wejściowy język L: 3-terminalowy Edge Multiway Cut.



- $\forall_{t \in T} \delta(t)$ to jedyny najmniejszy t-$T \setminus \{t\}$ separator;
- $\forall_{t \in T} \deg(t) = d$;
- $d < p < 2d$ (w przeciwnym wypadku trywialna instancja);
- łatwe do uzyskania znanymi redukcjami;

Szykowanie instancji

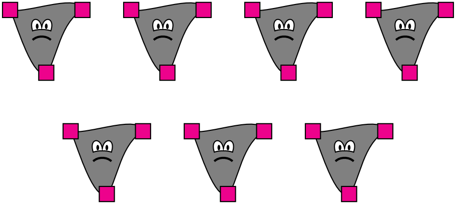
Wejściowy język L: 3-terminalowy EDGE MULTIWAY CUT.



- $\forall_{t \in T} \delta(t)$ to jedyny najmniejszy t-$T \setminus \{t\}$ separator;
- $\forall_{t \in T} \deg(t) = d$;
- $d < p < 2d$ (w przeciwnym wypadku trywialna instancja);
- łatwe do uzyskania znanymi redukcjami;
- redukcja NP-trudności autorstwa Dahlhausa i innych daje wszystkie te właściwości za darmo.

Kompozycja dla Edge Multicut

Cel: usunąć p krawędzi by odciąć s_i od t_i dla każdego i.

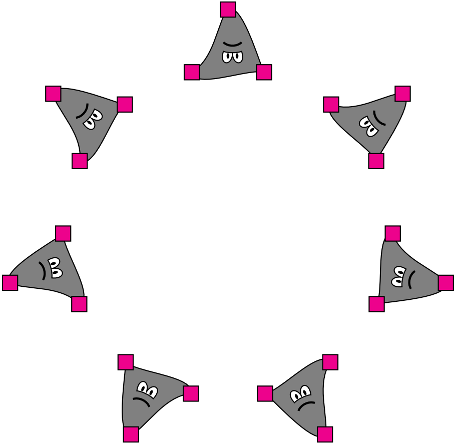


Przypomnijmy: $d < p < 2d$.

- zakładamy równe d i p; t jest nieparzyste;

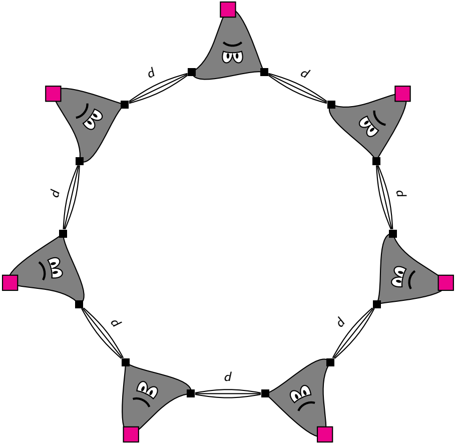
Kompozycja dla Edge Multicut

Cel: usunąć p krawędzi by odciąć s_i od t_i dla każdego i.



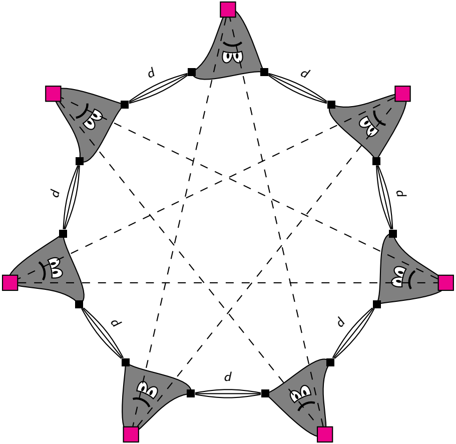
Przypomnijmy: $d < p < 2d$.

- zakładamy równe d i p; t jest nieparzyste;



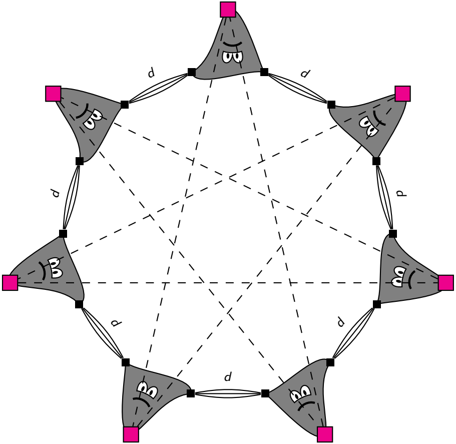
Przypomnijmy: $d < p < 2d$.

- zakładamy równe d i p; t jest nieparzyste;



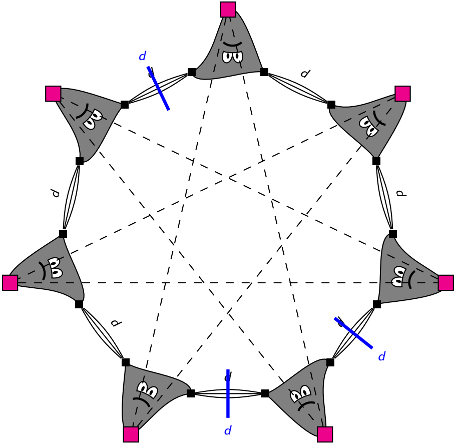
Przypomnijmy: $d < p < 2d$.

- zakładamy równe d i p; t jest nieparzyste;



Przypomnijmy: $d < p < 2d$.

- zakładamy równe d i p; t jest nieparzyste;
- budżet $:= d + p$;

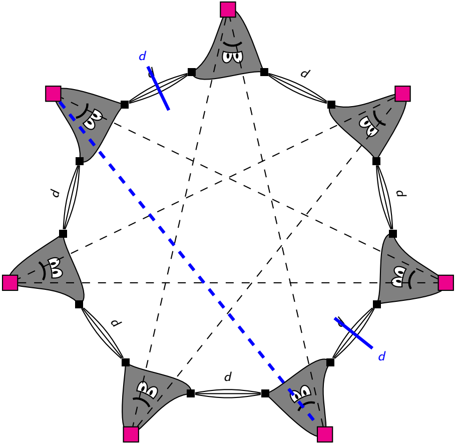


Przypomnijmy: $d < p < 2d$.

- zakładamy równe d i p; t jest nieparzyste;
- budżet $:= d + p$;
- nie da się przeciąć trzech grubych krawędzi;

Kompozycja dla Edge Multicut

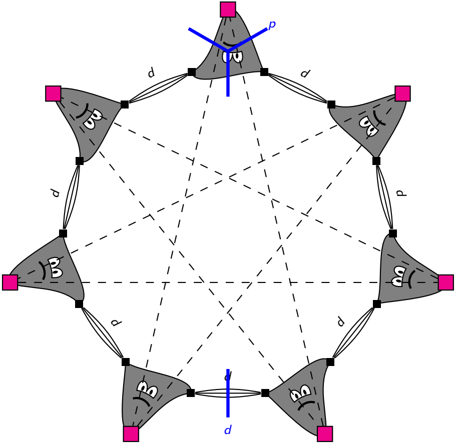
Cel: usunąć p krawędzi by odciąć s_i od t_i dla każdego i.



Przypomnijmy: $d < p < 2d$.

- zakładamy równe d i p; t jest nieparzyste;
- budżet $:= d + p$;
- nie da się przeciąć trzech grubych krawędzi;
- dwie grube krawędzie nie pomagają;

Cel: usunąć p krawędzi by odciąć s_i od t_i dla każdego i.



Przypomnijmy: $d < p < 2d$.

- zakładamy równe d i p; t jest nieparzyste;
- budżet $:= d + p$;
- nie da się przeciąć trzech grubych krawędzi;
- dwie grube krawędzie nie pomagają;
- jedyny sposób: rozwiązać jedną instancję i przeciąć naprzeciwległą grubą krawędź.

Dziękuję

Pytania?

Buźki w Tikzie są oparte o kod Raoula Kesselsa,
http://www.texample.net/tikz/examples/emoticons/,
na licencji Creative Commons Attribution 2.5 (CC BY 2.5)